

# Integrais Múltiplas

Evandro Alves Nakajima

Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
*Campus Santa Helena*

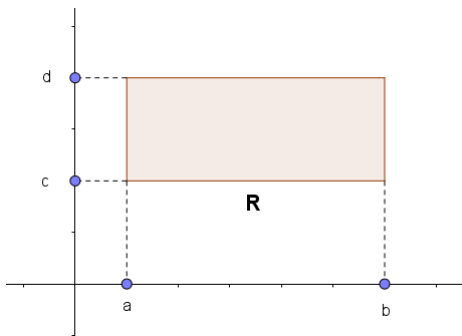
30 de Outubro de 2016



# Partição de um retângulo

Sejam  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que  $a < b$  e  $c < d$ .

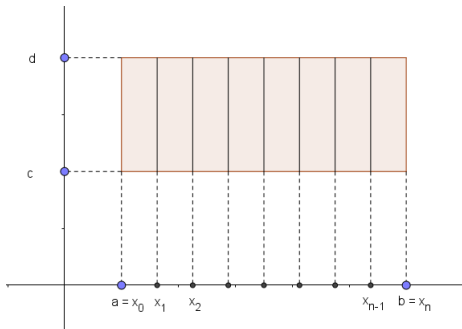
Considere o retângulo  $\mathbf{R} = [a, b] \times [c, d]$ .



Considere agora uma partição  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  com

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

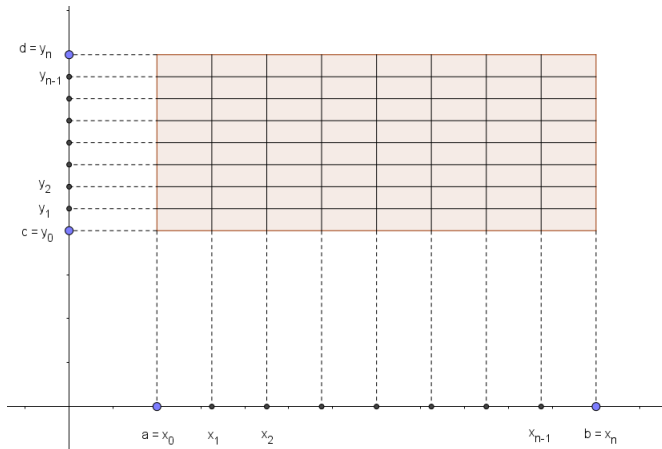
do intervalo  $[a, b]$ .



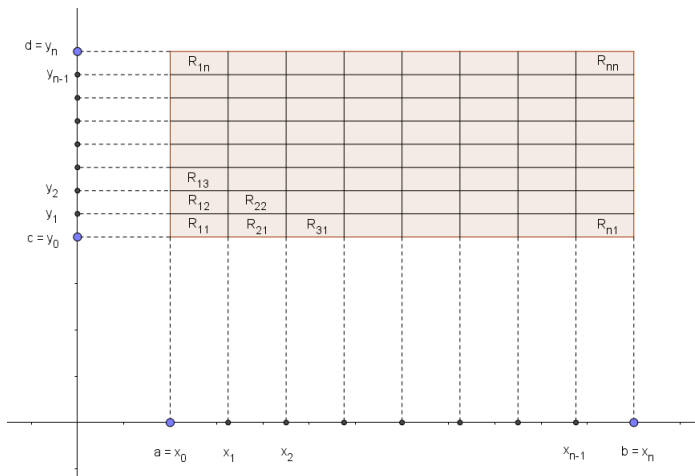
Considere também uma partição  $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$  com

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d,$$

do intervalo  $[c, d]$ .



Observe que as partições anteriores definem subretângulos de  $\mathbf{R}$ . Cada subretângulo  $R_{ij}$  é o produto cartesiano dos subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  e  $[y_{j-1}, y_j]$ , com  $1 \leq i, j \leq n$ .



As partições tomadas anteriormente não precisam ser necessariamente do mesmo tamanho, isto é, não precisam ter o mesmo número de pontos, entretanto fazer isso simplifica as contas. Além disso, outra simplificação feita é tomar o tamanho das partições dos intervalos o mesmo.

Sejam  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  e  $\Delta y = \frac{d-c}{n}$  as medidas das laterais dos subretângulos.

Seja  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada, isto é, existem números reais  $m$  e  $M$  tais que  $m \leq f(x, y) \leq M$  para todo  $(x, y) \in \mathbf{R}$ .

A soma de Riemann de  $f$  sobre  $\mathbf{R}$  é definida por

$$S_n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f(c_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

onde  $c_{ij}$  é um ponto aleatório pertencente ao subretângulo  $R_{ij}$ .

## Definição

A função  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável se o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

existe e o valor da integral dupla de  $f$  sobre  $\mathbf{R}$  é

$$\iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

## Teorema

Se  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua então  $f$  é integrável.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em no livro “Um curso de análise” vol. 2, Elon Lages Lima.

**Exemplo 1:** Vamos calcular

$$\int \int_{\mathbf{R}} xy^2 dx dy$$

onde  $\mathbf{R}$  é o retângulo  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**Solução:** Tomemos uma partição

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$$

$$0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = 1$$

de  $\mathbf{R}$ , com

$$x_k = k\Delta x \quad e \quad y_k = k\Delta y$$

onde  $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{n}$  (observe que de fato  $(x_k, y_k) \in R_k$ ).

Assim, temos que a soma de Riemman de  $f$  sobre  $\mathbf{R}$  é dada por

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot (y_j)^2 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i \cdot \Delta x \cdot j^2 \cdot \Delta y^2 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i \cdot j^2 \cdot \Delta x^2 \cdot \Delta y^3 \\ &= \frac{1}{n^5} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i \cdot j^2 \\ &= \frac{1}{n^5} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 5n^2 + 4n + 1}{12n^3} \end{aligned}$$

Deste modo, temos que a integral dupla de  $f$  sobre  $\mathbf{R}$  é

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 + 5n^2 + 4n + 1}{12n^3} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Fica como exercício provar as seguintes desigualdades (utilizar indução finita)

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sejam  $f, g : \mathbf{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Sejam também  $R_1$  e  $R_2$  dois retângulos cuja interseção são pontos de fronteira, satisfazendo  $\mathbf{R} = R_1 \cup R_2$ , então

i) Linearidade

$$\int \int_{\mathbf{R}} [f(x, y) + \alpha \cdot g(x, y)] dx dy = \int \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy + \alpha \cdot \int \int_{\mathbf{R}} g(x, y) dx dy$$

ii) Aditividade

$$\int \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy = \int \int_{R_1} f(x, y) dx dy + \int \int_{R_2} f(x, y) dx dy$$

iii) Se  $f(x, y) \leq g(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}$ , então

$$\int \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy \leq \int \int_{\mathbf{R}} g(x, y) dx dy$$

O próximo teorema é conhecido como Teorema de Fubini e nos diz que a integral de uma função contínua  $f$  sobre um retângulo  $\mathbf{R}$  é a integral de  $f$  com relação a uma das variáveis (mantendo a outra constante) e depois integramos novamente com relação à outra variável.

### Teorema

Sejam  $\mathbf{R} = [a, b] \times [c, d]$  e  $f : \mathbf{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, então

$$\int \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

## Exemplo

Calcule  $\int \int_R xy^2 dx dy$ , onde  $R$  é o retângulo  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Pelo teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\int \int_R xy^2 dx dy &= \int_0^1 \left[ \int_0^1 xy^2 dx \right] dy \\&= \int_0^1 \left[ \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right] y^2 dy \\&= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} - \frac{0}{2} \right] y^2 dy \\&= \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 dy \\&= \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{0}{3} \right) = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Seja  $f : \mathbf{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua sobre o retângulo  $\mathbf{R}$  tal que  $f(x, y) \geq 0$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbf{R}$ .

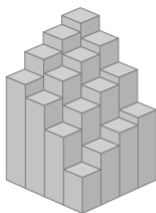
Feita uma partição desse retângulo observe que as laterais de cada subretângulo medem  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , logo a área de cada subretângulo é

$$\text{Área}(R_{ij}) = \Delta x \cdot \Delta y$$

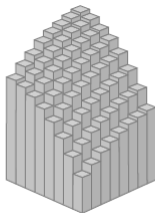
Ao escolhermos um ponto  $c_{ij} \in R_{ij}$  e calcularmos  $f(c_{ij})$ , obtemos a altura de um paralelepípedo  $P_{ij}$  de base  $\Delta x \Delta y$ . Assim, o volume desse paralelepípedo é

$$\text{Volume}(P_{ij}) = f(c_{ij}) \Delta x \Delta y$$

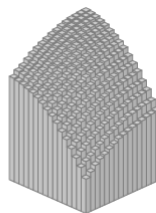




(a)  $m = n = 4$ ,  $V \approx 41.5$



(b)  $m = n = 8$ ,  $V \approx 44.875$



(c)  $m = n = 16$ ,  $V \approx 46.46875$

Deste modo,

$$V(f) = \int \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy$$

**Exemplo:** Vamos calcular o volume abaixo do gráfico de  $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$  sobre o retângulo  $R = [0, 2] \times [0, 2]$

$$\begin{aligned} V(f) &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[ 16y - x^2 y - \frac{2y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \int_0^2 \left[ 32 - 2x^2 - \frac{16}{3} \right] dx \\ &= \left[ 32x - \frac{2x^3}{3} - \frac{16x}{3} \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= 64 - \frac{16}{3} - \frac{32}{3} = 64 - 16 = 48 \end{aligned}$$