Integração Numérica

Evandro Alves Nakajima

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Santa Helena

2017

As fórmulas de quadratura são fórmulas usadas para calcular integrais da forma

$$\int_a^b \omega(x) \cdot f(x)dx \tag{1}$$

por

$$\int_a^b \omega(x) \cdot f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} A_k \cdot f(x_k),$$

onde,

$$A_k = \int_a^b \omega(x) \cdot l_k(x)dx$$

com

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}$$

Para isso, considere a família de polinômios $\phi_0(x),\ \phi_1(x),\ \phi_2(x),\ \ldots$ de graus $0, 1, 2, \ldots$ respectivamente, definidos por

$$\begin{cases} \phi_0(x) = 1 \\ \\ \phi_1(x) = x - \frac{\langle x\phi_0(x), \phi_0(x)\rangle}{\langle \phi_0(x), \phi_0(x)\rangle} = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \\ \\ \phi_{k+1}(x) = x\phi_k(x) - \alpha_k\phi_k(x) - \beta_k\phi_{k-1}(x) \quad para \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Onde,

$$\alpha_k(x) = \frac{\langle x\phi_k(x), \phi_k(x)\rangle}{\langle \phi_k(x), \phi_k(x)\rangle} \quad e \quad \beta_k(x) = \frac{\langle \phi_k(x), \phi_k(x)\rangle}{\langle \phi_{k-1}(x), \phi_{k-1}(x)\rangle}$$

com os produtos escalares adequados a cada $\omega(x)$ e intervalo $[a, b]$.

Polinômios de Legendre São obtidos usando-se o produto escalar:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

Onde, comparando com 1, temos $a = -1$, $b = 1$ e $\omega(x) = 1$.

Polinômios de Tchebyshev São obtidos usando-se o produto escalar

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx$$

Onde, comparando com 1, temos $a = -1$, $b = 1$ e $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Polinômios de Laguerre São obtidos usando-se o produto escalar

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)g(x)dx$$

Onde, comparando com 1, temos $a = 0$, $b = +\infty$ e $\omega(x) = e^{-x}$.

Polinômios de Hermite São obtidos usando-se o produto escalar

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)g(x)dx$$

Onde, comparando com 1, temos $a = -\infty$, $b = +\infty$ e $\omega(x) = e^{-x^2}$.

Vamos computar a integral

$$\int_{-1}^{1} e^x dx$$

utilizando 3 pontos e fazendo todos os cálculos necessários para obtê-los.
Primeiramente precisamos encontrar o polinômio $\phi_3(x)$ pertencente à família de polinômios ortogonais segundo o produto escalar sugerido por Legendre (pois $\omega(x) = 1$, $a = -1$ e $b = 1$).
Deste modo,

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = x - \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot 1 dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 dx} = x - \frac{0}{x|_{-1}^{1}} = x$$

$$\phi_2(x) = x\phi_1(x) - \alpha_1\phi_1(x) - \beta_1\phi_0(x)$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{\langle x\phi_1(x), \phi_1(x)\rangle}{\langle \phi_1(x), \phi_1(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} xxxdx}{\int_{-1}^{1} xxdx} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0$$

e

$$\beta_1 = \frac{\langle \phi_1(x), \phi_1(x)\rangle}{\langle \phi_0(x), \phi_0(x)\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} xxdx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1dx} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

Assim,

$$\phi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

Por fim, temos que

$$\phi_3(x) \;=\; x\phi_2(x) - \alpha_2\phi_2(x) - \beta_2\phi_1(x) \;=\; x\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) - \alpha_2\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) - \beta_2 x$$

Com,

$$\alpha_2 = \frac{\int_{-1}^{1} x\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)dx}{\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)dx} = 0$$

$$\beta_2 = \frac{\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)dx}{\int_{-1}^{1} xx dx} = \frac{4}{15}$$

Logo,

$$\phi_3(x) \;=\; x^3 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{15}x \;=\; x\left(x^2 - \frac{9}{15}\right),$$

donde, as raízes em que devemos calcular a integral são

$$x_0 = -0.7745966692, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0.7745966692$$

Agora, afim de utilizarmos a fórmula

$$A_k = \int_a^b \omega(x) \cdot l_k(x)dx$$

Devemos calcular $l_0(x),\ l_1(x)$ e $l_2(x)$, fazendo

$$l_0(x) = \frac{x \cdot (x - 0.7745966692)}{(-0.7745966692 - 0)(-0.7745966692 - 0.7745966692)} =$$

$$= \frac{x^2 - 0.7745966692x}{-1.1999999987}$$

$$l_1(x) = \frac{(x + 0.7745966692) \cdot (x - 0.7745966692)}{(0 + 0.7745966692)(0 - 0.7745966692)} =$$

$$= \frac{x^2 - 0.5999999993}{-0.5999999993}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - 0.7745966692) \cdot x}{(0.7745966692 - 0)(0.7745966692 + 0.7745966692)} =$$

$$= \frac{x^2 + 0.7745966692x}{1.1999999987}$$

Assim, temos que

$$A_0 = \int_{-1}^{1} \omega(x) \cdot l_0(x) dx = 0.55555555555$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1} \omega(x) \cdot l_1(x) dx = 0.88888888888$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} \omega(x) \cdot l_2(x) dx = 0.55555555555$$

Deste modo, segundo a fórmula de quadratura,

$$\int_{-1}^{1} e^x dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

$$= 0.5555555555 e^{-0.7745966692} + 0.88888888888 e^{0} + 0.5555555555 e^{0.7745966692}$$

$$\approx 2.350336928$$