Iteração Linear

Evandro Alves Nakajima

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Santa Helena

2017

Iteração Linear

Novamente nos deparamos com o problema de encontrar os zeros de uma função contínua $f(x)$ em um determinado intervalo.

A idéia inicial deste método é isolar x na equação $f(x) = 0$ obtendo assim, uma nova equação na forma

$$x = \psi(x)$$

Exemplifiquemos: Digamos que queremos encontrar as raízes da função $f(x) = x^2 - x - 2$.

Isto é, queremos encontrar as soluções da equação

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Podemos então isolar x de diversas maneiras segundo a equação anterior:

- $x = x^2 - 2$ e $\psi(x) = x^2 - 2$
- $x = 1 + \frac{2}{x}$ e $\psi(x) = 1 + \frac{2}{x}$
- $x = \sqrt{2 + x}$ e $\psi(x) = \sqrt{2 + x}$

Além da função ψ, para este método precisaremos também de uma aproximação inicial para raiz desejada.

Chamemos tal aproximação de x_0.

Assim, o processo iterativo começa com

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \psi(x_0) \\
x_2 &= \psi(x_1) \\
x_3 &= \psi(x_2) \\
x_4 &= \psi(x_3) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Onde x_k é nossa $k-$ésima aproximação da raiz desejada.

Para que esse método seja eficaz precisamos pedir que a sequência x_k convirja para raiz desejada $\overline{x}$.

Para o nosso exemplo específico, por se tratar de uma função de segundo grau é fácil encontrar suas raízes.

Mesmo assim faremos o procedimento visto aqui afim de exemplificar alguns pontos importantes.

Vamos tratar o problema com duas ψ's distintas e ver a questão da convergência quando tomamos $x_0 = 2.5 = y_0$ (próximo à raiz $\overline{x} = 2$).

Tomemos

$$\psi_1(x) = x^2 - 2 \qquad e \qquad \psi_2(x) = \sqrt{2 + x}$$

E também

$$x_{k+1} = \psi_1(x_k) \quad e \quad y_{k+1} = \psi_2(y_k)$$

k	x_k	$\psi_1(x_k)$	y_k	$\psi_2(y_k)$
0	2.5	4.25	2.5	2.1213
1	4.25	16.06	2.1213	2.03
2	16.06	255.9236	2.03	2.0075
3	255.9236	65494.88904	2.0075	2.0019

Note que a sequência $x_k \to +\infty$ (está divergindo) enquanto a sequência $y_k \to 2$ (está convergindo para raiz desejada).

Sendo assim, nem toda escolha de ψ é uma escolha viável.

Os resultados a seguir serão de grande utilidade na demonstração do Teorema que nos dá condições suficientes para que uma sequência seja convergente.

Teoremas Importantes

Teorema

(Valor Médio) Se f é uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) então existe pelo menos um ponto ξ entre a e b tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teorema

(Permanência do Sinal) Seja f uma função contínua em uma vizinhança de x_0. Se $f(x_0) \neq 0$, então existe uma vizinhança $V = (a,b)$ de x_0 na qual $f(x) \neq 0$ para todo x em (a,b).

Demonstração: Introdução à Análise Matemática - 2° edição - pg's 130 e 84 - Geraldo Ávila (ISBN $978-85-212-0168-7$)

Condição de Convergência

Teorema

Seja ψ uma função de classe C^2 no intervalo $I = [\overline{x} - h, \overline{x} + h]$, cujo centro $\overline{x}$ é a solução de $x = \psi(x)$. Seja $x_0 \in I$ e M um número real limitante tal que $|\psi'(x)| \leq M < 1$ para todo $x \in I$. Então

a) *A iteração $x_{k+1} = \psi(x_k)$ pode ser executada indefinidamente pois $x_k \in I, \forall k$.*
b) $|x_{k+1} - \overline{x}| \to 0$.
c) *Se $\psi'(\overline{x}) \neq 0$ ou $\psi'(\overline{x})$ e $\psi''(\overline{x}) \neq 0$ e se $|\overline{x} - x_0|$ for suficientemente pequeno então a sequência x_k será monotônica ou oscilante.*

Exemplo 1

Utilizaremos o método das iterações lineares para encontrar os zeros da função $f(x) = x^3 - x - 1$.

Primeiramente, sendo $f'(x) = 3x^2 - 1$, podemos analisar seu crescimento e averiguar que f é sempre negativa para valores de x menores que 1 e fica positiva quando $x = 2$, sendo crescente depois desse valor.

Concluímos então que f possui apenas um zero situado entre 1 e 2.

Como passo seguinte vamos encontrar uma função auxiliar ψ que seja viável.

Verifiquemos a viabilidade de três funções auxiliares ψ_1, ψ_2 e ψ_3 no intervalo $I = [1, 2]$, sendo

$$\psi_1(x) = x^3 - 1 \qquad \psi_2(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \qquad \psi_3(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

Temos que $\psi_1'(x) = 3x^2$ para a qual temos $|\psi_1'(x)| > 1$ para todo $x \in I$

Temos que $\psi_2'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$ e, para tal função, $\psi_2'(1) = -5$, não satisfazendo o teorema. (é importante observar que com a redução do intervalo I uma função auxiliar ψ pode passar a satisfazer as condições de convergência)

Por fim, temos que $\psi_3'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, a qual é decrescente positiva para valores maiores que 1, sendo $\psi_3(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$.

Escolheremos então $\psi(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

Tomando $x_0 = 1$, temos a seguinte tabela de iterações

k	x_k	$\psi(x_k)$	$f(x_k)$	$\lvert f(x_k)\rvert < \epsilon?$
0	1	1.2599	-1	F
1	1.2599	1.3123	-0.26	F
2	1.3123	1.3242	-0.0523	F
3	1.3242	1.3246	-0.0103	F
4	1.3246		-0.0005	V

Portanto o zero de f que procuramos é aproximadamente $x_4 = 1.3246$

Exemplo 2

Encontremos o zero da função $f(x) = x^3 - 2x - 15$ situado no intervalo $[2,3]$ com um erro absoluto $\epsilon = 0.001$ $(|x_k - x_{k+1}| < \epsilon)$.

Tomemos $\psi(x) = \sqrt[3]{2x+15}$. Teremos então

$$\psi'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+15)^2}}$$

logo, as condições de convergência estão satisfeitas.

Vamos tomar como chute inicial $x_0 = 2.5$, e obteremos a seguinte tabela

k	x_k	$\psi(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k+1}\rvert$	$\lvert x_k - x_{k+1}\rvert < \epsilon$?
0	2.5	2.7144	0.2144	F
1	2.7144	2.7337	0.0193	F
2	2.7337	2.7354	0.0017	F
3	2.7354	2.7355	0.0001	V

Portanto, uma boa aproximação para o zero de f é

$$x_4 = 2.7355$$