Ministério da Educação

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Câmpus Santa Helena

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Lista de Exercícios: Espaços Vetoriais

Exercício 1 *Verifique se* $\mathbb{R}^2$ *é um espaço vetorial com as operações abaixo:*

a) $(a,b)+(c,d)=(a-c,b-d)$

$\alpha(a,b)=(-\alpha a,-\alpha b)$

b) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$\alpha(a,b)=(\alpha a,0)$

c) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$\alpha(a,b)=(2\alpha a,2\alpha b)$

d) $(a,b)+(c,d)=(0,0)$

$\alpha(a,b)=(\alpha a,\alpha b)$

e) $(a,b)+(c,d)=(a+d,b+c)$

$\alpha(a,b)=(\alpha a,\alpha b)$

Exercício 2 *Considere o conjunto* Ψ *de todas as funções* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *Considere sobre* Ψ *as operações* $+,\cdot$ *definidas por*

$$+:(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad \cdot:\ (\alpha\cdot f)(x)=\alpha\cdot f(x).$$

O conjunto Ψ *com estas operações é um espaço vetorial?*

Exercício 3 *Considere o conjunto* $\mathcal{C}^0$ *de todas as funções contínuas em* $\mathbb{R}$. *Considere sobre* $\mathcal{C}^0$ *as operações*

$$+:\ (f+g)(x)\ =\int f(x)dx+\int g(x)dx \qquad \cdot:\ (\alpha f)(x)=\alpha\int f(x)dx$$

sendo a constante de integração igual à 0. *O conjunto* $\mathcal{C}^0$ *com estas operações é um espaço vetorial?*

Exercício 4 *Prove que o conjunto $\mathcal{P}_n$ dos polinômios de grau n é um espaço vetorial com as operações usuais.*

Exercício 5 *Verifique se os seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:*

a) $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 3\right\}$

b) $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 = y\right\}$

c) $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 3y\right\}$

d) $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = x + 2z\right\}$

Exercício 6 *Verifique se o conjunto solução do sistema* $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases}$ *é um S.E.V. de $\mathbb{R}^3$.*

Exercício 7 *Verifique se os conjuntos abaixo são LI ou LD:*

a) $\{(1, 0, 0), (1, 3, 5), (3, 2, 5)\}$

b) $\{(1, 2, -1), (0, 0, 5), (1, 1, 1), (3, 0, 1)\}$

c) $\{(1, 0, 2), (0, -1, 3), (0, 0, 2)\}$

d) $\{(1, 0, 0), (3, 2, 1)\}$

Exercício 8 *Mostre que se o conjunto $\{u, v, w\}$ é LI, então o conjunto $\{u + v, u + w, v + w\}$ também é LI.*

Exercício 9 *Escreva $p(x) = x^2 + x - 1$ como combinação linear de $q(x) = x^2 - 2x$ e $r(x) = 2x^2 - \frac{4}{3}$.*

Exercício 10 *Seja $\mathcal{P}_3$ o conjunto dos polinômios de grau 3. Verifique se os seguintes conjuntos de polinômios são LI ou LD em $\mathcal{P}_3$:*

a) $\{x, x^2, x^3\}$

b) $\{x + 1, x^2 + x, x^2 - 1\}$

c) $\{7, x + 2, x^2 + x + 1, x^3 + x^2 - x - 2\}$

d) $\{x, x^2 + 1, x - 2, x^2 + x - 1\}$

Exercício 11 *O conjunto $\{(-1, 2), (0, 1), (3, 1)\}$ gera $\mathbb{R}^2$?*

Exercício 12 *Determine a equação do plano gerado pelos vetores* $(-1,2,0),(0,1,2)e(-2,5,2)$.

Exercício 13 *Para que valores de* k *os vetores* $(1,2,0,k),(0,-1,k,1),(0,2,1,0)$ *e* $(1,0,2,3k)$ *geram um espaço tridimensional?*

Exercício 14 *Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^3$*.*

a) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x=2y \text{ e } z=y\right\}$

b) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x+2y-z=0\right\}$

c) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|y=0ex+z=0\right\}$

Exercício 15 *Determine o subespaço interseção e o subespaço soma para os casos abaixo, indicando quando a soma é direta.*

a) $S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-2y+z=0\right\}$ *e* $S_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+3y=0\right\}$

b) $S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x=y\right\}$ *e* $S_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y+z=0\right\}$

Exercício 16 *Seja* $v=(1,2,3)$ *e a base* $A=\{(1,0,3),(-1,7,5),(2,-1,6)\}$*. Indique* $[v]_A$*.*

Exercício 17 *Sejam* $S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ y=0\right\}$ *e* $S_2=[(-1,2,0),(3,1,1)]$*. Determine* $S_1\cap S_2$ *e* S_1+S_2*.*

Exercício 18 *Considere* $A=\{(1,1,1),(0,2,3),(0,2,-1)\}$ *uma base para o* $\mathbb{R}^3$*. Encontre as coordenadas de* $v=(3,5,-2)$ *em relação a esta base.*

Exercício 19 *Dadas as bases do* $\mathbb{R}^3$*,* $A=\{(-1,0,2),(0,1,0),(0,0,2)\}$ *e* $B=\{(0,0,1),(0,-2,1),(1,0,-1)\}$*. Determine* $[I]_B^A$*. Dado* $[v]_A=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$*, calcule* $[v]_B$*.*

Exercício 20 *Considere o subespaço W de $\mathbb{R}^4$ dado por*

$$W = [(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(-2,2,1,1),(1,0,0,0)].$$

a) O vetor $(2,-3,2,2) \in W$?

b) Exiba uma base para W. Qual é a dimensão de W?

c) $W = \mathbb{R}^4$?

Exercício 21 *Sejam*

$$W_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x+y=0 \text{ e } z-t=0\right\}$$

$$W_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x-y-z+t=0\right\}$$

a) Determine $W_1 \cap W_2$.

b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.

c) Determine $W_1 + W_2$.

Exercício 22 *Considere as seguintes bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$:*

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \quad \beta_1 = \{(-1,1),(1,1)\} \quad \beta_2 = \left\{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\right\} \quad \beta_3 = \{(2,0),(0,2)\}.$$

a) Ache as matrizes mudanças de base:

[i.] $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ *[ii.]* $[I]_{\beta_1}^{\beta}$ *[iii.]* $[I]_{\beta_2}^{\beta}$ *[iv.]* $[I]_{\beta_3}^{\beta}$

b) Quais são as coordenadas do vetor $v=(3,-2)$ em relação à base:

[i.] β *[ii.]* β_1 *[iii.]* β_2 *[iv.]* β_3

Exercício 23 *Quais são as coordenadas de $x=(1,0,0)$ em relação à base*

$$\beta = \{(1,1,1),(-1,1,0),(1,0,-1)\}?$$

Exercício 24 *As coordenadas de um vetor v em relação à base β_1 são dadas por*

$$[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quais são as coordenadas de v em relação a base:

a) β *b)* β_2 *c)* β_3

Exercício 25 *Se*

$$[I]_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule

a) $[v]_{\alpha}$, *onde* $[v]_{\alpha'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

b) $[v]_{\alpha'}$, *onde* $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.