Método de Newton

Evandro Alves Nakajima

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Santa Helena

2017

Um sistema linear com m equações e n variáveis pode ser escrito como:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (*)$$

Onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, para todo $0 \leq i \leq m$ e $0 \leq j \leq n$, bem como $b_i \in \mathbb{R}$ para todo$0 \leq i \leq m$.

Uma solução para o sistema $(*)$ é uma $n-$úpla $\overline{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ que satisfaz as m equações simultaneamente.

Por exemplo, considere o sistema S de 3 equações e 3 variáveis:

$$\begin{cases} x+y+z & = & 0 \\ x-y+z & = & 2 \\ x+y-z & = & 2 \end{cases}$$

Note que $\overline{x} = (2, -1, -1)$ é uma solução do sistema S. De fato,

$$\begin{cases} 2-1-1 & = & 0 \\ 2+1-1 & = & 2 \\ 2-1+1 & = & 2 \end{cases}$$

Um Sistema Linear pode ser classificado pelo número de soluções que possui:

a) Possível determinado: 1 solução

b) Possível indeterminado: infinitas soluções

c) Impossível: 0 soluções

Um sistema como $(*)$ é um sistema triangular inferior se $a_{ij} = 0$ sempre que $i < j$.

Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x & = & 6 \\ 2x - y & = & 2 \\ x + y + 2z & = & 2 \end{cases}$$

Para encontrar a solução do sistema acima basta fazermos:

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

Donde na segunda linha obtemos

$$y = -2 + 2x = -2 + 6 = 4$$

e por fim

$$z = \frac{2 - x - y}{2} = \frac{2 - 3 - 4}{2} = -\frac{5}{2}$$

De uma maneira geral, um sistema triangular inferior tem a forma

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & & & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & & & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \qquad (*)$$

Onde $a_{ii} \neq 0$, para todo $0 \leq i \leq n$.

Não é difícil ver que o valor de x_1 é dado por

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Uma vez encontrado o valor de x_1, é fácil verificar o valor de x_2 fazendo

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

Para x_3 temos

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

E sucessivamente, podemos obter valor da $i-$ésima variável por

$$x_i = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k}{x_{ii}}$$

No caso de um sistema triangular superior, devemos proceder de maneira parecida, entretanto, começando pela última variável, isto é:

$$x_i = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k}{x_{ii}}$$