Integração Numérica

Evandro Alves Nakajima

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Santa Helena

2017

Fórmula de Newton-Cotes (Regra do Trapézio)

Definição

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função integrável em* $[a, b]$. *Seja também uma partição do intervalo* $[a, b]$ *em* n *subintervalos de mesmo tamanho* $h = \frac{b-a}{n}$. *Então a integral de* f *em* $[a, b]$ *pode ser aproximada por:*

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + f(x_n) + 2(f(x_1) + ... + f(x_{n-1}))],$$

onde $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Exemplo

Vamos calcular a integral

$$\int_0^1 sen(x)dx$$

Sabendo que

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$sen(x)$	0	0.1987	0.3894	0.5646	0.7174	0.8415

Solução: Pela fórmula de Newton-Cotes, temos que

$$\int_0^1 sen(x)dx \approx$$

$$\approx \left(\frac{0.2}{2}\right) \cdot [0 + 2 \cdot (0.1987 + 0.3894 + 0.5646 + 0.7174) + 0.8415]$$

$$= 0.45817$$

Observe que a integral anterior, se resolvida de maneira exata nos dá:

$$\int_0^1 sen(x)dx = [-cos(x)|_{x=0}^{x=1} = -(cos(1) - cos(0)) \approx 0.45969769$$

Donde obtemos um erro igual à

$$R(f) = |0.45969769 - 0.45817| = 0.00152769$$

Proposição

O erro na fórmula de Newton-Cotes pode ser estimado por:

$$R(f) \leq \frac{n \cdot h^3}{12} \cdot \left| \max_{x_0 \leq x \leq x_n} f''(x) \right|,$$

onde n é o número de subintervalos e h é o tamanho de cada subintervalo.

Exemplo (erro)

Na integral que calculamos anteriormente temos o intervalo $[0, 1]$ dividido em 5. Assim temos que $n = 5$ e que $h = 0.2$. Além disso, temos que

$$f''(x) = -sen(x) \;\Rightarrow\; \left| \max_{0 \leq x \leq 1} -sen(x) \right| = sen(1) \approx 0.8415$$

Sendo assim, o erro $R(f)$ para aproximação que fizemos deve satisfazer a condição

$$R(f) \leq \frac{5 \cdot (0.2)^3}{12} \cdot 0.8415 = 0.002805$$

E, de fato, o valor obtido na integral (numérica) foi 0.45817 enquanto o valor da integral exata é aproximadamente 0.45969769. Sendo assim, o erro obtido realmente satisfaz a condição estabelecida.

Exemplo

Calcule a seguinte integral com erro inferior a 0.01

$$\int_0^{0.8} e^x dx$$

Solução: Primeiramente, temos que saber quantos intervalos serão necessários para que a integral atenda o requisito do erro.
Isto é, queremos que

$$R(f) = \frac{n \cdot h^3}{12} \cdot \left| \max_{x_0 \leq x \leq x_n} f''(x) \right| \leq 0.01$$

onde

$$h = \frac{0.8 - 0}{n} = \frac{0.8}{n}$$

$$f''(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \left| \max_{0 \leq x \leq 0.8} e^x \right| \quad = \quad e^{0.8} \quad \approx \quad 2.2255$$

Assim, temos que

$$\frac{n \cdot \left(\frac{0.8}{n}\right)^3}{12} \cdot 2.2255 \leq 0.01 \quad \Rightarrow \quad \frac{0.512 \cdot n}{12n^3} \cdot 2.2255 \leq 0.01$$

$$\Rightarrow \quad \frac{0.512 \cdot 2.2255}{12 \cdot 0.01} \leq n^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 \geq 9.4955 \quad \Rightarrow \quad n \geq 3.0815$$

Ou seja, basta tomarmos 4 intervalos e o erro será menor que 0.01.

Sendo assim, tomemos a tabela com os valores aproximados para e^x no intervalo $[0, 0.8]$:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$sen(x)$	1	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255

Portanto,

$$\int_0^{0.8} e^x \approx \frac{0.2}{2} \cdot [1 + 2.2255 + 2 \cdot (1.2214 + 1.4918 + 1.8221)] = \ 1.22961$$

Enquanto a integral exata pode ser calculada como

$$\int_0^{0.8} e^x dx = e^{0.8} - 1 \approx 2.2255 - 1 = 1.2255$$

Donde obtemos um erro igual à

$$1.22961 - 1.2255 = 0.00411$$

Exemplo

Utilize a regra do trapézio para estimar a integral

$$\int_1^3 \frac{e^{sen^2(x)} \cdot ln(x)}{x^3+5}dx,$$

sabendo que

x	1.5	2	2.5	3
$\frac{e^{sen^2(x)} \cdot ln(x)}{x^3+5}$	0.130945	0.121889	0.063561	0.035022

Solução: Pela regra do trapézio, temos

$$\int_1^3 \frac{e^{sen^2(x)} \cdot ln(x)}{x^3+5}dx = \frac{0.5}{2} \cdot [0.130945 + 0.035022 + 2 \cdot (0.121889 + 0.063561)]$$

$$= 0.13421675$$

Que é uma boa aproximação da integral exata, que tem valor igual à 0.137489

Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

Divida o intervalo $[a, b]$ em subintervalos de tamanho $h = \frac{b-a}{3n}$, isto é, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em por um número múltiplo de 3.

Sejam $x_0 = a < x_1 < ... < x_{3n} = b$

A integral de f sobre $[a, b]$ pode ser aproximada por

$$\int_{x_0}^{x_{3n}} f(x)dx =$$

$$= \frac{3h}{8} \cdot [f(x_0) + f(x_{3n}) + 3 \cdot (f(x_1) + f(x_2)) + 2 \cdot f(x_3) + ... + 2 \cdot f(x_{3n-3}) + 3 \cdot (f(x_{3n-2} + f(x_{3n-1}))]$$

Simplificando: Os $f(x_i)$ cujo i não é múltiplo de 3 devem ser multiplicados por 2, já os $f(x_i)$ cujo i é múltiplo de 3 devem ser multiplicados por 2, excetuando-se o primeiro e o último termo.

Exemplo

Vamos calcular a integral de $ln(x)$ *no intervalo* $[1, 2.8]$ *utilizando os dois métodos a partir da seguinte tabela de valores:*

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	1	1.3	1.6	1.9	2.2	2.5	2.8
$ln(x)$	0	0.2624	0.47	0.6418	0.7885	0.9163	1.03

Solução: Pela regra $\frac{3}{8}$ de Simpson, temos

$$\int_1^{2.8} ln(x)dx = \frac{3 \cdot 0.3}{8} \cdot [0 + 1.03 + 3 \cdot (0.2624 + 0.47 + 0.7885 + 0.9163) + 2 \cdot 0.6418]$$

$$= 1.082835$$

Enquanto calculando pelo método exato, temos

$$\int_1^{2.8} ln(x)dx = [xln(x) - x|_{x=1}^{x=2.8} \approx 1.082934$$

Por outro lado, pela regra do trapézio temos que

$$\int_1^{2.8} ln(x)dx = \frac{0.3}{2} \cdot [0 + 1.03 + 2 \cdot (0.2624 + 0.47 + 0.6418 + 0.7885 + 0.9163)]$$

$$= 1.0782$$

Observe que a regra $\frac{3}{8}$ está mais próxima do resultado que a regra do trapézio.

Exemplo

Façamos mais um exemplo comparando os dois métodos, agora com uma tabela menor:

x	0	0.2	0.4	0.6
$e^x - x$	1	1.0214	1.0918	1.2221

Solução: Pela regra do trapézio

$$\int_0^{0.6} (e^x - x)dx = \frac{0.2}{2} \cdot [1 + 1.2221 + 2 \cdot (1.0214 + 1.0918)]$$
$$= 0.64485$$

Pela regra $\frac{3}{8}$ de Simpson

$$\int_0^{0.6} (e^x - x)dx = \frac{3 \cdot 0.2}{8} \cdot [1 + 1.2221 + 3 \cdot (1.0214 + 1.0918)]$$
$$= 0.6421275$$

Pelo método exato

$$\int_0^{0.6} (e^x - x)dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right|_{x=0}^{x=0.6} \approx 0.642119$$

Observe que, novamente, o método $\frac{3}{8}$ está muito mais próximo do resultado exato que a regra do trapézio.

Erro na regra $\frac{3}{8}$ de Simpson

O limitante para o erro da regra $\frac{3}{8}$ de Simpson é dado por

$$R(f) \leq \frac{h^4}{80} \cdot (x_{3n} - x_0) \cdot \max_{x_0 \leq \xi \leq x_{3n}} \left| f^{(4)}(\xi) \right|$$

Exemplo

No exemplo anterior, temos que

$$f^{(4)}(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \max_{0 \leq \xi \leq 0.6} |e^x| \; = \; e^{0.6} \approx 1.8221$$

Assim,

$$R(f) \leq \frac{0.2}{80} \cdot (0.6 - 0) \cdot 1.8221 = 0.002733$$

É importante observa que:

i) Subintervalos maiores que 1 aumentam o erro, logo deve-se escolher (em geral) subintervalos menores que 1.

ii) O tamanho total do intervalo influencia no erro, mesmo não estando em nosso controle.

iii) Deve-se conhecer o comportamento da quarta derivada de $f(x)$, isto é, conhecer o crescimento e decrescimento de $f^{(4)}(x)$.

Exemplo

Calcule a integral abaixo utilizando a regra $\frac{3}{8}$ de Simpson com erro inferior à 0.0001

$$\int_1^4 e^{-x^2}dx$$

Solução: Sendo $3n$ o número de subintervalos, se chamarmos $N = 3n$, temos que

$$h = \frac{4-1}{N} = \frac{3}{N}$$

$$x_N - x_0 = 4 - 1 = 3$$

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \Rightarrow f'''(x) = 12xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 12e^{-x^2} - 24x^2e^{-x^2} - 24x^2e^{-x^2} + 16x^4e^{-x^2}$$

Assim, temos que

$$f^{(4)}(x) \ = \ 12e^{-x^2} - 48x^2e^{-x^2} + 16x^4e^{-x^2}$$

Monte uma tabela no Excel e verifique que no intervalo $[1,4]$ o maior valor em módulo que obtemos é

$$\max_{1\leq\xi\leq 4} f^{(4)}(\xi) \ = \ 7.3576$$

Assim, temos que

$$\frac{\left(\frac{3}{N}\right)^4}{80} \cdot 3 \cdot 7.3576 \leq 0.0001$$

$$\Rightarrow \quad \frac{243}{N^4} \leq 0.000362 \quad \Rightarrow \quad \frac{243}{0.000362} \leq N^4 \quad \Rightarrow \quad 671270.07 \leq N^4$$

$$N \geq 28.62$$

Logo, teremos de tomar 29 subintervalos ou mais. Como esse número deve ser múltiplo de 3, faremos a divisão em 30 subintervalos:

1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1
0,367879	0,298197	0,236928	0,184520	0,140858	0,105399	0,077305	0,055576	0,039164	0,027052	0,018316	0,012155

2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3
0,007907	0,005042	0,003151	0,001930	0,001159	0,000682	0,000394	0,000223	0,000123	0,000067	0,000036	0,000019

3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0,000010	0,000005	0,000002	0,000001	0,000001	0,000000	0,000000

Feita essa divisão, o valor da integral desejada será:

$$\int_1^4 e^{-x^2} dx \approx \frac{3 \cdot 0.1}{8} \cdot [0.367879 + 0 + 2 \cdot \blacksquare + 3 \cdot \blacksquare]$$

Onde ■ é a soma das células verdes e ■ é a soma das azuis.

Isto é,

$$\blacksquare = 0.9168308 \qquad e \qquad \blacksquare = 0,2988314$$

Portanto,

$$\int_1^4 e^{-x^2} dx \approx \frac{0.3}{8} \cdot (0.367879 + 2 \cdot 0.2988314 + 3 \cdot 0.9168308) = 0.1393512825$$

Que nos dá um erro de aproximadamente 0.0000517, inferior ao erro desejado.

Ainda sobre o mesmo exercício, se tomássemos a regra do trapézio, a estimativa do número n de intervalos seria

$$\frac{n \cdot h^3}{12} \cdot \left| \max_{x_0 \leq \xi \leq x_n} f''(\xi) \right| \leq 0.0001$$

Onde

$$h = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n} \quad e \quad f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \Rightarrow \left| \max_{1 \leq \xi \leq 4} f''(\xi) \right| \leq 1$$

Assim, temos que

$$\frac{27n}{12n^3} \leq 0.0001 \quad \Rightarrow \quad \frac{27}{12 \cdot 0.0001} \leq n^2 \quad \Rightarrow \quad 22.500 \leq n^2$$

Portanto $n \geq 150$, que é um número de intervalos consideravelmente maior que o encontrado no método $\frac{3}{8}$.